4.4. ガトー微分とフレシェ微分.

ここでは,変数が有限次元か無限次元かに関わらない,停留条件の統一的な考え方を紹介する.

$C^1[t_0, t_f]$ は,実数体の無限次元ベクトル空間であり,

$$\|x\|_{C^1} := \max_{t\in[t_0,t_f]} \|x(t)\| + \max_{t\in[t_0,t_f]} \|\dot{x}(t)\|$$

をノルムとするノルム空間.

極限,関数の連続性を考えることができる.

微分が定義できれば,変数が無限次元の場合を含めて最適化問題を統一的に扱うことができる.

ノルム空間 X で定義された関数 $J: X \to \mathbb{R}$ が点 $x^* \in X$ において局所最小ならば,α を実数として,任意の $y \in X$ に対して

$$\Phi(\alpha) := J[x^* + \alpha y]$$

が $\alpha = 0$ で局所最小(証明略). よって,局所最小の必要条件は,

$$\frac{\partial \Phi(0)}{\partial \alpha} = 0$$

である.(4.1)の汎関数を,ノルム空間 $C^1[t_0, t_f]$ で定義された関数とみなし,実際に $d\Phi/d\alpha$ を計算する.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x^* + \alpha y, \dot{x}^* + \alpha \dot{y}, t)\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} \right) dt \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right\} y\, dt
\end{aligned}$$

(∵ 4.1と同様)

y は任意なので,停留条件としてオイラーの方程式が得られる.

Remark
- $\alpha\eta$ が変分 δx に対応している
- $d\Phi/d\alpha$ は η に関して線形.
- 1変数関数 $\Phi(\alpha)$ の α に関する微分で停留条件が表される.

一般に、関数 $J: X \to \mathbb{R}$ および $x, \eta \in X$ に対して、極限

$$\delta J[x;\eta] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[x+\alpha\eta] - J[x]}{\alpha}$$

が存在するとき、$\delta J[x;\eta]$ を J の x における、増分 η の ガトー微分 という.

特に、ガトー微分 $\delta J[x;\eta]$ が増分 η に関して線形かつ連続なとき、

$$\delta J[x;\eta] = J'[x]\eta$$

と表し、$J'[x]\eta$ を J の x における、増分 η の フレシェ微分 という.
各点 x ごとに決まる線形作用素 $J'[x]: X \to \mathbb{R}$ を、J の x における フレシェ導関数 という.

… $J'[x]\eta$ は、線形作用素 $J'[x]$ を $\eta \in X$ に作用させて得られる実数.

Remark
- ガトー微分やフレシェ微分は方向微分の一般化.
- フレシェ微分はガトー微分の特別な場合
  - ガトー微分が存在しても、フレシェ微分が存在するとは限らない.
- ガトー微分やフレシェ微分が存在すれば、変数が有限次元か無限次元かに関係なく、停留条件は $\delta J[x^*, \eta] = 0$ or $J'[x]\eta = 0$ for $\forall \eta$ と表される.
- 変分法における第1変分はガトー微分かつフレシェ微分.

例：有限次元のガトー微分とフレシェ微分
$X = \mathbb{R}^n$ とする. スカラー値関数 $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して定義を適用.

$$\delta V[x;\eta] = \frac{\partial V}{\partial x}\eta \qquad \delta V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$V'[x] = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

よって、ガトー微分は方向微分の一般化であり、フレシェ導関数は勾配ベクトルの一般化である.