6.2. 最小原理

- ○ オイラー・ラグランジュ方程式
  - ・常微分方程式の2点境界値問題
- ○ ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式
  - ・偏微分方程式

同じ最適制御問題から導かれたもの

ここでは、動的計画法から最小原理（オイラー・ラグランジュ方程式の拡張）と呼ばれる条件を経由してオイラー・ラグランジュ方程式が導かれることを示す。

Point

○ ハミルトン関数の定義における随伴変数 λ が、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式 (6.6) では $(\partial V/\partial x)^T$ におきかわっている。

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \min_u H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x, t), t\right)$$

以下、最適軌道を $\bar{x}(t)$、最適制御を $\bar{u}(t) = u_{opt}(\bar{x}(t), t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ とする。

オイラー・ラグランジュ方程式の (5.4) 式

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0$$

は、システムの状態方程式と初期状態。

⇝ 最適軌道と最適制御に対しても成立する。

オイラー・ラグランジュ方程式の (5.5) 式

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)(x, u, \lambda, t), \quad \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)(x(t_f))$$

は、以下のように導かれる。

入力 $\bar{u}(t) = u_{opt}(\bar{x}(t), t)$ は、他の $x \neq \bar{x}(t)$ に対して最適とは限らない。
(6.6) より、任意の x, t に対して

$$\eta(x, t) := \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x, u, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T, t\right) \geq 0$$

が成り立ち、各時刻において、$\eta(x, t)$ は、$x = \bar{x}(t)$ のときに最小値 0 をとる。

$$⇝ \frac{\partial \eta}{\partial x}(\bar{x}(t), t) = 0$$

実際に偏導関数を計算すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \boxed{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \quad (6.16)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \underline{f^T} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

となる。

さらに、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right)^T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T = \left(f^T\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x}\right)^T$$

を用いて (6.16) を整理すると、最適軌道 $\bar{x}(t)$ に沿って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}(t),t) = \underline{-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T\left(\bar{x},\bar{u},\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T,t\right)} \qquad (6.17)$$

オイラー・ラグランジュ方程式の右辺

が成り立つ。また、(6.4)式 $\left(V(x,t_f)=\phi(x)\right)$ を x で偏微分し、$x=\bar{x}(t_f)$ を代入、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}(t_f),t_f) = \underline{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T(\bar{x}(t_f))} \qquad (6.18)$$

終端条件の右辺

を得る。(6.17)、(6.18) より、

$$\lambda(t) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(\bar{x}(t),t) \qquad (6.19)$$

は、オイラー・ラグランジュ方程式 (5.5) をみたす。

⇝ 随伴変数は、値関数の勾配を最適軌道に沿って評価したものになっている。

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x,t) = \min_u H\left(x,u,\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T(x,t),t\right)$$

一方で、$u_{opt}(x,t)$ は (6.6) の右辺を最小にしているので、最適軌道 $\bar{x}$ と最適制御 $\bar{u}(t)=u_{opt}(x,t)$、および (6.19) で与えられる随伴変数 λ に対して、

$$H(\bar{x},\bar{u},\lambda,t) = \min_u H(\bar{x},u,\lambda,t) \qquad (6.20)$$

が各時刻で成り立つ。

⇝ 最適制御は、最適軌道に沿ってハミルトニアン関数を最小にしている。

⇝ ハミルトニアン関数の u に関する偏導関数が 0

オイラー・ラグランジュ方程式の (5.6) $\frac{\partial H}{\partial u}(x,u,\lambda,t)=0$

Remark

- (5.6) を導出する前の (6.20) がより一般的な条件。

(例) 制御入力 u がある集合に制約されて $\partial H/\partial u = 0$ が成り立ち得ない場合でも、ハミルトニアン関数が最小になっていればよい。

- (6.20) に基づく最適性の必要条件を最小原理という。

Th 6.3. (最小原理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ に対して $\bar{u}(t) \in \Omega$ ($t_0 \le t \le t_f$) という拘束条件のもとで評価関数 (6.2) を最小にする最適制御が存在するとし、対応する最適軌道を $\bar{x}(t)$ とする。
値関数 $V(x,t)$ が2回連続微分可能ならば、n 次元ベクトル値関数 $\lambda(t)$ が存在して以下が成り立つ。

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad \bar{x}(t_0) = x_0 \tag{6.21}$$

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (\bar{x}, \bar{u}, \lambda, t), \quad \lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (\bar{x}(t_f)) \tag{6.22}$$

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \lambda, t) = \min_{u \in \Omega} H(\bar{x}, u, \lambda, t) \tag{6.23}$$

Remark

- 最小原理は動的計画法を用いずに導出することもできる。
  (値関数の2回連続可能性を仮定しなくても成り立つ)
- DPを用いると導出が容易。

例 6.3. (バンバン制御)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

において、制御入力 u に対して $|u| \le 1$ という拘束条件が課されているとする。
i.e., $u \in \Omega = \{u \mid |u| \le 1\}$.

制御入力 u を含まない評価関数

$$J = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(x(t))\, dt$$

を最小にすることを考える。ハミルトン関数は、

$$H(x, u, \lambda) = L(x) + \lambda^T (f(x) + g(x)u)$$

制御入力に拘束条件が課されているので、最小原理を適用。

H は u に関して1次。
⇝ H を最小にする u は u の係数 $\lambda^T g(x)$ の符号に応じて以下のように決まる。

$$u = \begin{cases} 1 & (\lambda^T g(x) < 0) \\ -1 & (\lambda^T g(x) \ge 0) \end{cases}$$

$\lambda^T g(x) = 0$ で切り替わる (切替え時刻)

◎ 評価関数が制御入力の2次形式を含まない場合、最適制御は拘束条件の中で最大値か最小値をとる
… バンバン制御

$$S_{sw}(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{\partial V}{\partial x}(x, t)\, g(x) = 0 \right\}$$ … 切替え曲面

を通過する際に入力の切り替えが起こる。