6.3. 特異最適制御問題

◎ バンバン制御において、切り替え曲面上に沿って状態が動いていく場合には最小原理によって制御入力が決定できない。

- $\lambda(t)^T g(x(t)) = 0$ が一瞬だけ成り立つ。
  ⇝ そのときの入力をどのように選んでも状態の軌道に影響しない。

- $\lambda(t)^T g(x(t)) = 0$ が、ある長さを持った時間区間にわたって恒等的に成り立つ。
  ⇝ H における u の係数が 0。最小原理から u を決めることができない。

  … このときの状態の軌道を特異弧といい、そこでの最適制御を特異最適制御という。

◎ 特異最適制御を決定するには、最小原理以外の条件を導く必要がある。

H における u の係数が 0 になる
… H が u に依存しなくなる。

⇝ $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad (6.24)$$

が恒等的に成り立つ。これは最適性の必要条件。

⇝ ・特異弧では、制御入力によらず条件 (5.6) が成り立つ。
- (6.24) は特異弧にわたって恒等的に成り立つ。
  … 何回時間微分しても 0。

簡単のため、u：スカラーとする。1階微分を考える。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\dot{x} + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\dot{\lambda}$$
$$= \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} f - \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T = 0 \qquad (6.25)$$

となる。

- もしも (6.25) の左辺に u が現れるならば、(6.24) の代わりに (6.25) から $u(t)$ が決まる。
- (6.25) の左辺に u が現れない場合でも、さらに時間微分を続けて、ある階数 k で u が現れたならば、
  $$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0 \qquad (6.26)$$
  という条件から u を決定できる。
- 多入力の場合、入力ごとに上記の微分回数 k が異なる場合がある。
- (5.2) 節における弱いクレブシュ条件を一般化した関係式
  $$(-1)^l \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^{2l}}{dt^{2l}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^T\right\} \geq 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$
  が知られている。