7.3. シューティング法.

シューティング法

- 7.1節 (2) に相当.
- 随伴変数の初期値 $\lambda(t_0) = \lambda_0$ を未知量として、それを少しずつ修正して終端条件

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T (x(t_f))$$

が成り立つようにする方法.

随伴変数の初期値が $\delta\lambda_0$ だけ変化したときの終端時刻における状態 $x(t_f)$ と随伴変数 $\lambda(t_f)$ の変化を調べる.

- $x(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$ の変動を $\delta x(t)$, $\delta\lambda(t)$, $\delta u(t)$ とする.
- オイラー・ラグランジュ方程式のうち、終端条件 (7.4)以外をすべて満たすとする.

⇝

$$(*)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x+\delta x) = f(x+\delta x,\ u+\delta u,\ t) \\ \dfrac{d}{dt}(\lambda+\delta\lambda) = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x+\delta x,\ u+\delta u,\ \lambda+\delta\lambda,\ t) \\ \dfrac{\partial H}{\partial u}(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \lambda+\delta\lambda,\ t) = 0 \end{cases}$$

ただし、

- $x(t_0) = x_0$: 固定より $\delta x(t_0) = 0$.
- $\delta\lambda(t_0) = \delta\lambda_0$ である.

⇝ 終端条件 (7.4) における誤差が減るように $\delta\lambda_0$ を上手く与える.

(*) の Taylor 展開を考えると、

$$f(x+\delta x,\ u+\delta u,\ t) = f(x, u, t) + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix}$$

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x+\delta x,\ u+\delta u,\ \lambda+\delta\lambda,\ t)$$
$$= -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^T (x, u, \lambda, t) - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x+\delta x,\ u+\delta u,\ \lambda+\delta\lambda,\ t)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, \lambda, t) + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \\ \delta\lambda \end{bmatrix}$$

である.

⇝ (7.1), (7.3), (7.5) との差をとる.

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f}{\partial u}\delta u \\ \delta \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\delta x - \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\delta u - \dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial \lambda}\delta \lambda \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \dfrac{\partial^2 H}{\partial^2 u}\delta u + \dfrac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta \lambda = 0 \end{cases}$$

※3式より.

$$\delta u = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}\delta x + \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \lambda}\delta \lambda\right)$$

2式と3式の $\delta \lambda$ の係数行列は、5.3節と同様に変形できる.

ここで、時変の行列 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ を、5.2節と同様に.

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T$$

$$C(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x}$$

と定義すると、以下の線形微分方程式が得られる.（5.3節と同じギロン）

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) \\ -C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \lambda \end{bmatrix}$$

$$\delta x(t_0) = 0, \quad \delta \lambda(t_0) = \delta \lambda_0$$

〜）随伴変数の初期値 $\lambda(t_0)$ を $\delta \lambda_0$ だけ変化させたときの解の変化が線形微分方程式の解で与えられる、

解が遷移行列を使って表せる、

$\Phi(t)$ を、

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) \\ -C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}\Phi(t) \qquad (7.11)$$

$$\Phi(t_0) = I \qquad (7.12)$$

を満たすものとする. $\Phi(t)$ を、係数行列と同様のブロックに分割.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

⇝ 初期状態 $\delta x(t_0)=0$, $\delta\lambda(t_0)=\delta\lambda_0$ を用いて,
終端時刻の状態と随伴変数の微小変化が,

$$\begin{bmatrix}\delta x(t_f)\\ \delta\lambda(t_f)\end{bmatrix} = \Phi(t_f)\begin{bmatrix}\delta x(t_0)\\ \delta\lambda(t_0)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\Phi_{11}(t_f) & \Phi_{12}(t_f)\\ \Phi_{21}(t_f) & \Phi_{22}(t_f)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \delta\lambda_0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\Phi_{12}(t_f)\\ \Phi_{22}(t_f)\end{bmatrix}\delta\lambda_0$$

と表される. したがって, 終端条件 (7.4) の誤差

$$E = \lambda(t_f) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T (x(t_f)) \qquad (7.13)$$

の微小変化は,

$$dE = \delta\lambda(t_f) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f))\,\delta x(t_f)$$

$$= \left(\Phi_{22}(t_f) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f))\,\Phi_{12}(t_f)\right)\delta\lambda_0$$

と表せる.
⇝ 誤差の修正量 dE が望ましい値になるような $\delta\lambda_0$ を求めることができる.

e.g. $dE = -E$: ニュートン法

$$\delta\lambda_0 = -\left(\Phi_{22}(t_f) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x(t_f))\,\Phi_{12}(t_f)\right)^{-1} E \qquad (7.14)$$

… $\lambda(t_0)$ の修正量.

⇝ $\lambda(t_0)$ の修正を繰り返して $E=0$ となれば, オイラー・ラグランジュ方程式 (7.1) − (7.5) がすべて満たされる.

以上をアルゴリズムの形でまとめる.

Algorithm 7.3（シューティング法，遷移行列による方法）

(1) 適当なベクトル λ_0 を随伴変数の初期値に対する初期推定解として与える。

(2) (7.2) と $\lambda(t_0) = \lambda_0$ を初期条件として連立微分方程式 (7.1), (7.3) を終端時刻 t_f まで数値的に解き、状態 $u(t)$ と随伴変数 $\lambda(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ を求める。
∵ 各時刻の制御入力 $u(t)$ は、(7.5) を $u(t)$ について解いて求める。

(3) 終端条件の誤差 E を (7.13) によって計算する。$\|E\|$ が十分 0 に近ければ停止、そうでなければ次のステップへ。

(4) (7.11) を、(7.12) の初期条件から終端時刻 t_f まで数値的に解き、遷移行列のブロック $\Phi_{12}(t_f)$ と $\Phi_{22}(t_f)$ を求める。

(5) (7.14) によって $\delta\lambda_0$ を求める。

(6) $\lambda_0 := \lambda_0 + \delta\lambda_0$ としてステップ (2) へ。

Remark
- 遷移行列のうち Φ_{12} と Φ_{22} のみ用いる。
- $dE = -E$ は、終端における $\delta x(t_f)$, $\delta\lambda(t_f)$ に対する条件とみなせる。

⇝ シューティング法は、線形微分方程式の2点境界値問題と考えることもできる。

解がリッカチ微分方程式の解を使って表せる。

⇝ 遷移行列を直接用いないアルゴリズムも導出できる。

解くべき線形2点境界値問題は、

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t) \\ -C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

$$\delta x(t_0) = 0 \tag{7.16}$$

$$\delta\lambda(t_f) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x(t_f))\,\delta x(t_f) + \underbrace{dE}_{= -E\ \text{なので}} \tag{7.17}$$

終端条件 (7.17) が成り立つように、

$$\delta\lambda(t) = S(t)\,\delta x(t) + c(t) \tag{7.18}$$

$$S(t_f) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x(t_f)), \quad c(t_f) = dE \tag{7.19}$$

を仮定し、(7.15) に代入。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta x \\ S\delta x + c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -B \\ -C & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x \\ S\delta x + c\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\delta \dot{x} \\ \dot{S}\delta x + S\delta\dot{x} + \dot{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(A - BS)\delta x \\ (-C - A^T S)\delta x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-Bc \\ -A^T c\end{bmatrix}$$

上半分で決まる $\delta\dot{x}$ を下半分に代入.

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x} \\ \dot{S}\delta x + \dot{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(A - BS)\delta x \\ (-A^T S - SA + SBS - C)\delta x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-Bc \\ (-A^T + SB)c\end{bmatrix}$$

下半分は

$$\dot{S} + A^T S + SA - SBS + C = 0 \qquad (7.20)$$

$$\dot{c} + (A^T - SB)c = 0 \qquad (7.21)$$

をみたす $S(t)$ と $c(t)$ によって常に成り立つ.

→ 微分方程式 (7.20), (7.21) と, 終端条件 (7.19) から $S(t)$, $c(t)$ が決まれば, 上半分の

$$\delta\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)S(t))\delta x(t) - B(t)c(t) \qquad (7.22)$$

は $\delta x(t)$ の常微分方程式.

→ 初期条件 $\delta x(t_0) = 0$ と合わせて $\delta x(t)$ を決定.

(7.18) より, 求める $\lambda(t_0) = \lambda_0$ の修正量 $\delta\lambda_0$ は,

$$\delta\lambda_0 = c(t_0) \qquad (7.23)$$

で与えられる.

- $\delta x(t_0) = 0$ より, $S(t_0)$ の項は消えている.

→ 遷移行列を使わずに (7.20), (7.21) を逆時間で解くことで線形2点境界値問題を解く.
backward sweep

backward sweep をアルゴリズムの形でまとめる

Algorithm 7.4. (ニューティング法: backward sweep による方法)

(1) 適当なベクトル λ_0 を, 随伴変数の初期値に対する初期推定解として与える.

(2) (7.2) と $\lambda(t_0) = \lambda_0$ を初期条件として連立微分方程式 (7.1), (7.3) を終端時刻 t_f まで数値的に解き, 状態 $x(t)$ と随伴変数 $\lambda(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ を求める. その際, 各時刻の制御入力は方程式 (7.5) を $u(t)$ について解いて求める.

(3) 終端条件の誤差 E を (7.13) によって計算する. $\|E\|$ が十分 0 に近ければ停止し, そうでなければ次のステップへ.

(4) (7.20), (7.21) を終端条件 (7.19) から初期時刻 t_0 まで逆時間方向へ数値的に解き, 行列 $S(t)$ とベクトル $c(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_f)$ を求める.

(5) (7.23) によって $\delta\lambda_0$ を求める.

(6) $\lambda_0 := \lambda_0 + \delta\lambda_0$ としてステップ (2) へ.

Remark

- ニューティング法では, 制御入力の関数という無限次元の量を求める~~最適制御~~問題が有限次元の初期随伴変数 $\lambda(t_0) = \lambda_0$ を求める問題に帰着.

- $\lambda(t_0)$ の変化に対する $x(t_f)$ と $\lambda(t_f)$ の変化は, 差分近似で表すことも可能.

- (7.11), (7.15) の係数行列は ハミルトン行列 と呼ばれる.
  ∴ ある固有値 △ に対して必ず −△ も固有値になる
  ⇝ 時不変の場合なら, 安定な固有値 と 不安定な固有値 の両方を持つ.
  0に収束　　　発散
  ⇝ 随伴変数の初期値を同じ大きさだけ変化させても,
  ① 終端条件の誤差がほとんど変わらない
  ② 〃 非常に大きくなる.

  (数学的に等価な backward sweep も同様)

⇝ ニューティング法は数値的困難に陥りやすく, 初期推定解が解に十分近くないと使えない場合がある.